

TRAVAUX PRATIQUES MAPLE NO. 1 (DEUXIÈME TRIMESTRE)

CPES FEYDER II

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

Exercice 1 : Écrire une procédure nommée - `nombredeux` - qui prend en argument un entier n et qui renvoie comme valeur le nombre de fois où l'entier 2 divise n . Puis vérifier les résultats obtenus en utilisant la commande `ifactor`. Ainsi, par ex., `nombredeux(155) = 0` et `ifactor(155) = (5)(31)`, `nombredeux(4640) = 5` et `ifactor(4640) = (2)5 (5) (29)`.

Exercice 2 : On souhaite étudier la densité des nombres premiers parmi l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

- (1) Écrire une procédure `densitePremiers` qui prend comme argument un entier naturel n et qui renvoie la densité d des nombres premiers contenus dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, la densité d étant définie comme le nombre d'entiers premiers appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, divisé par n (nombre total des entiers de $\{1, \dots, n\}$). Par ex., `densitePremiers(6) = 0.5` car il y a trois entiers premiers : 2, 3, 5 dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ d'où $d = 3/6 = 0,5$;
- (2) Calculer les densités d pour $n = 10, 100, 1\ 000, 10\ 000, 100\ 000, 1\ 000\ 000$;
- (3) Quelle conclusion en tirez-vous ?
- (4) Écrire une procédure `densiteJumaux` qui prend comme argument un entier naturel n et qui renvoie la densité d' des nombres premiers jumaux dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On appelle nombres premiers jumaux tout couple $(p, p + 2)$ où p et $p + 2$ sont premiers. Par ex., `densiteJumaux(6) = 0.1666666` car 3 et 5 sont premiers jumaux (on a donc $d' = 1/6$) ;
- (5) Calculer les densités d' pour $n = 10, 100, 1\ 000, 10\ 000, 100\ 000, 1\ 000\ 000$.

Exercice 3 :

- (1) Écrire une procédure `image` qui prend comme argument une fonction Maple f et deux entiers m et n . La procédure renvoie la liste des images par la fonction f de tous les entiers de m à n ;
- (2) Appliquer la procédure à l'application polynômiale $p := x \mapsto x^2 + x + 41$ avec les entiers $m = -40$ et $n = 40$;
- (3) Écrire une procédure `premiers` qui prend comme argument une liste L et qui renvoie la liste M des nombres premiers contenus dans L ;
- (4) Appliquer la procédure à la liste obtenue précédemment. Que constate-t-on?

Exercice 4 : Les nombres de Fermat sont les entiers $F_k := 2^{(2^k)} + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$. On se demande lesquels sont premiers.

Écrire une procédure `fermat` qui ne prend pas d'argument et qui calcule dans l'ordre les nombres de Fermat, tant qu'ils sont premiers. Pour chaque valeur de k , la procédure affiche sur une ligne « $F_k =$ » suivi de sa valeur calculée, grâce à la commande d'affichage `printf`. Puis, dès que le nombre F_{k_0} n'est pas premier, la procédure affiche le texte « Le k_0 ème nombre de Fermat n'est pas premier. », suivi de la décomposition en facteurs premiers de F_{k_0} .